

# Percolation et géométrie algébrique

## une étonnante association

Congrès des jeunes chercheuses et chercheurs  
en mathématiques et applications

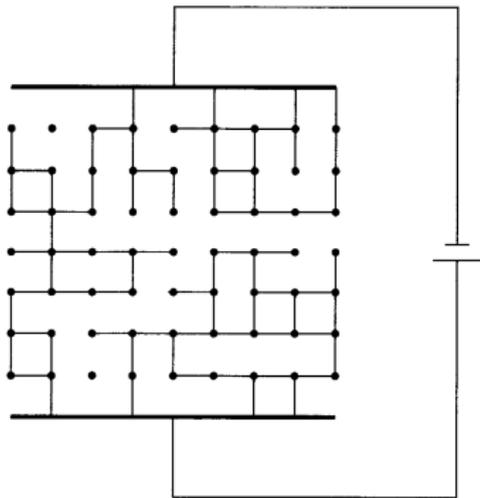


Damien Gayet (Institut Fourier, Grenoble)

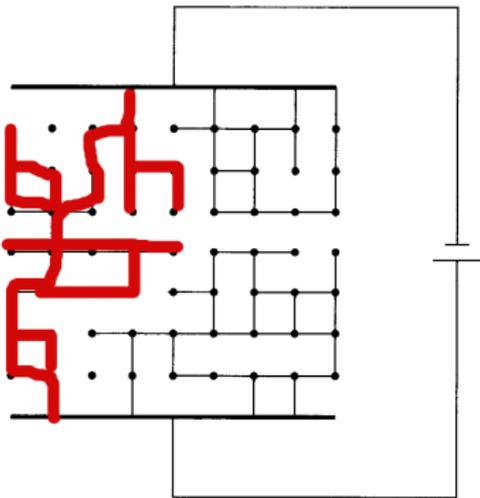
25 septembre 2023



Percolation de Bernoulli par arête sur le réseau carré



Percolation par arête sur le réseau carré



Le courant passe

# PERCOLATION PROCESSES

## I. CRYSTALS AND MAZES

By S. R. BROADBENT AND J. M. HAMMERSLEY

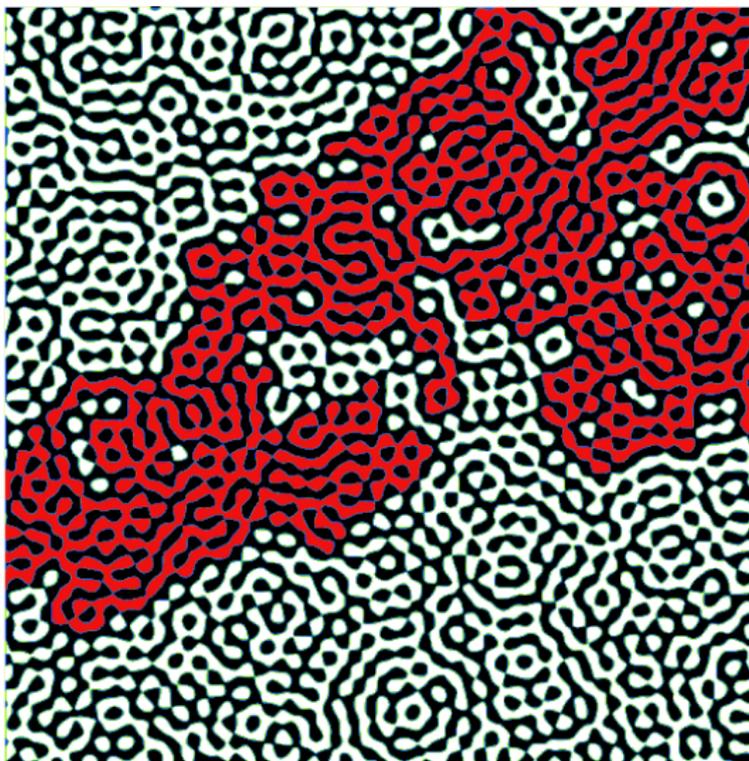
*Received 15 August 1956*

*ABSTRACT.* The paper studies, in a general way, how the random properties of a 'medium' influence the percolation of a 'fluid' through it. The treatment differs from conventional diffusion theory, in which it is the random properties of the fluid that matter. Fluid and medium bear general interpretations: for example, solute diffusing through solvent, electrons migrating over an atomic lattice, molecules penetrating a porous solid, disease infecting a community, etc.

\*\*\*\*\*

UNITED GLASS BOTTLE  
MANUFACTURERS, LTD

UNITED KINGDOM ATOMIC ENERGY  
RESEARCH ESTABLISHMENT  
HARWELL, NEAR DIDCOT, BERKS



Onde plane

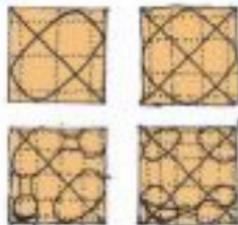


Figure de Chladni

FRANCE

0,70 €

*Chère*



*Sait p premier imaire  
Tel que  $3p + 1 \in \mathbb{P}$ . Alors  
 $2^p \cdot y = z^2 \Rightarrow p \mid x \cdot y \cdot z$*



SOPHIE  
GERMAIN  
1776-1831

La Poste 2016

Dans les cas de vibrations compris dans cette intégrale, les lignes d'extrémités courbes et les lignes d'extrémités droites sont les unes et les autres physiquement libres, cependant elles sont dans un état analytiquement différent.

En effet, les lignes d'extrémités courbes satisfont aux conditions

$$\begin{aligned}
 & -SN^2 \left( \frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \delta \left( \frac{dr}{dx^a} \right) ds + SN^2 d \left( \frac{\frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2}}{dx^a} \right) \delta r ds \left. \vphantom{\frac{d^2 r}{dx^{2a}}} \right\} = 0; \\
 & \qquad \qquad \qquad + S \frac{N^2}{a^2} \left( \frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \left( \frac{dr}{dx^a} \right) \delta r ds \\
 & -SN^2 \left( \frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \delta \left( \frac{dr}{ds} \right) dx + SN^2 d \left( \frac{\frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2}}{ds} \right) \delta r dx \left. \vphantom{\frac{d^2 r}{dx^{2a}}} \right\} = 0; \\
 & \qquad \qquad \qquad + S \frac{N^2}{a^2} \left( \frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \left( \frac{dr}{ds} \right) \delta r dx
 \end{aligned}$$

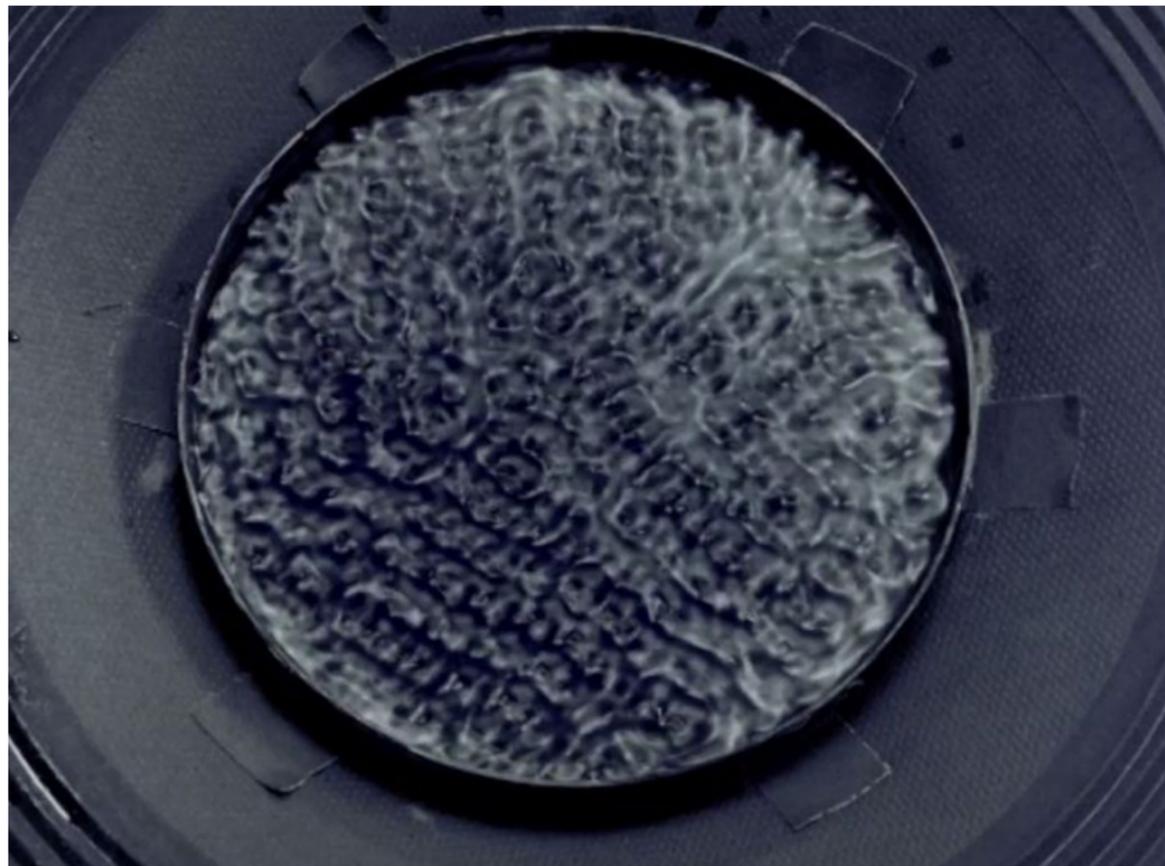
en vertu des équations  $dx = 0$ ,  $\left( \frac{dr}{dx^a} \right) = 0$ , et  $d \left( \frac{\frac{d^2 r}{dx^{2a}} + \frac{d^2 r}{ds^2}}{dx^a} \right) = 0$ ;  
 tandis que pour les lignes d'extrémités droites, ce sont les équations

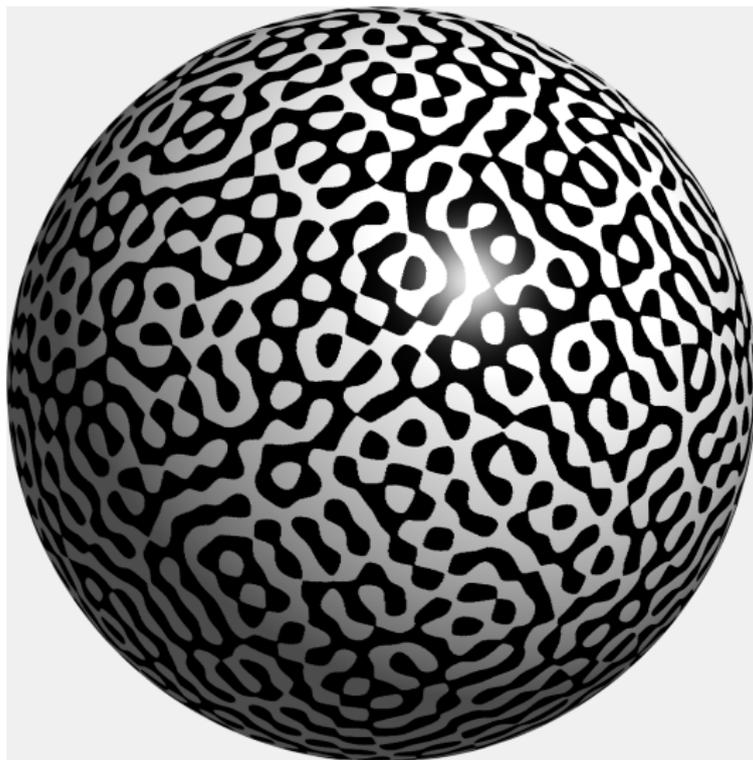
E. Tartaglino - A. Filippini - A. Ferrari

Les audaces de

# SOPHIE GERMAIN

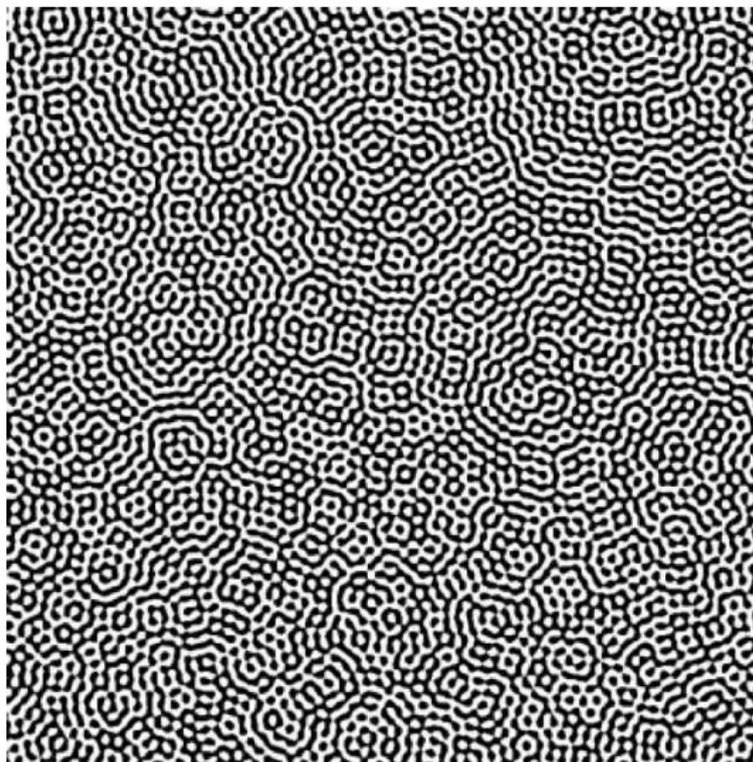


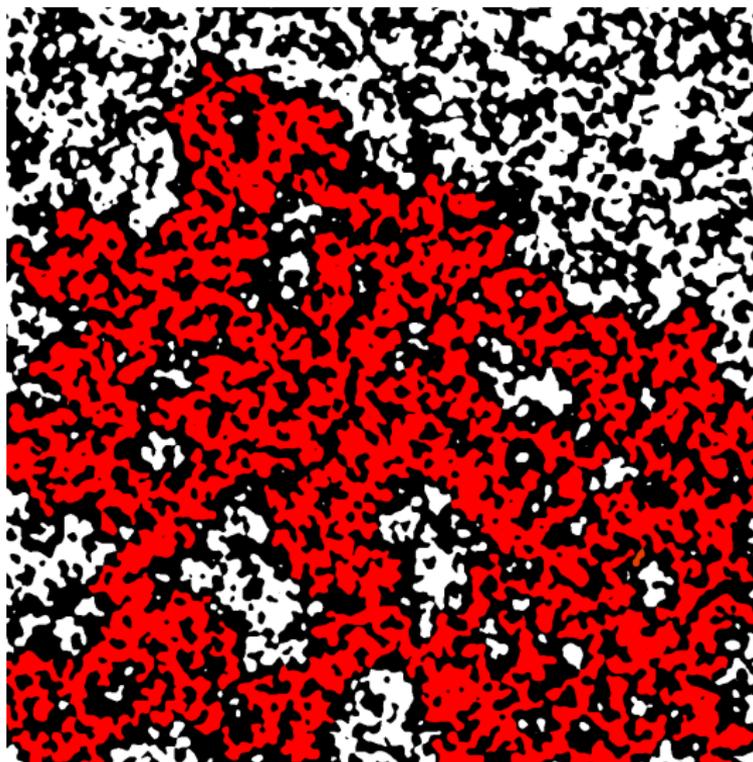




Harmonique sphérique de degré 80  
(polynôme homogène et harmonique)

Image : Alex Barnett

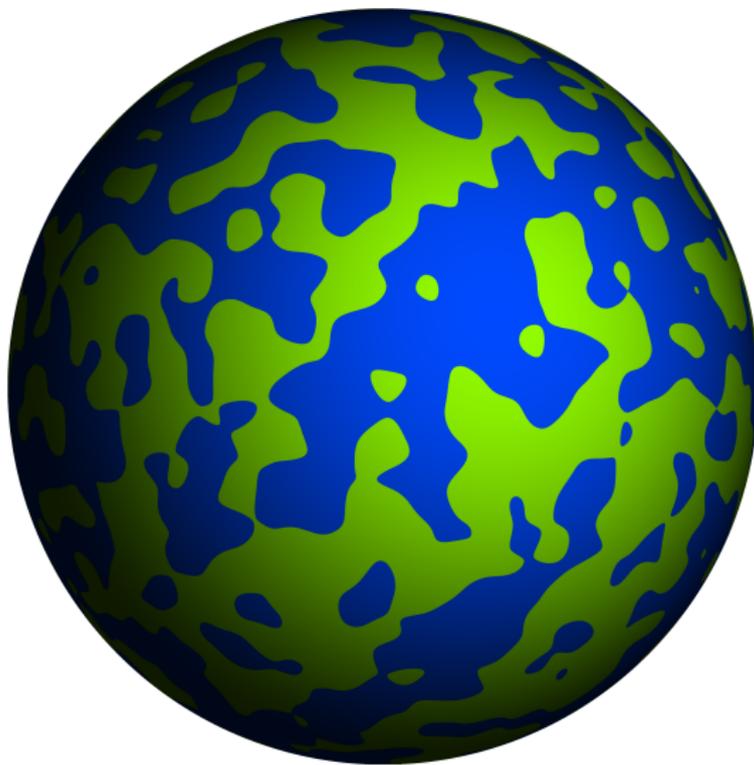




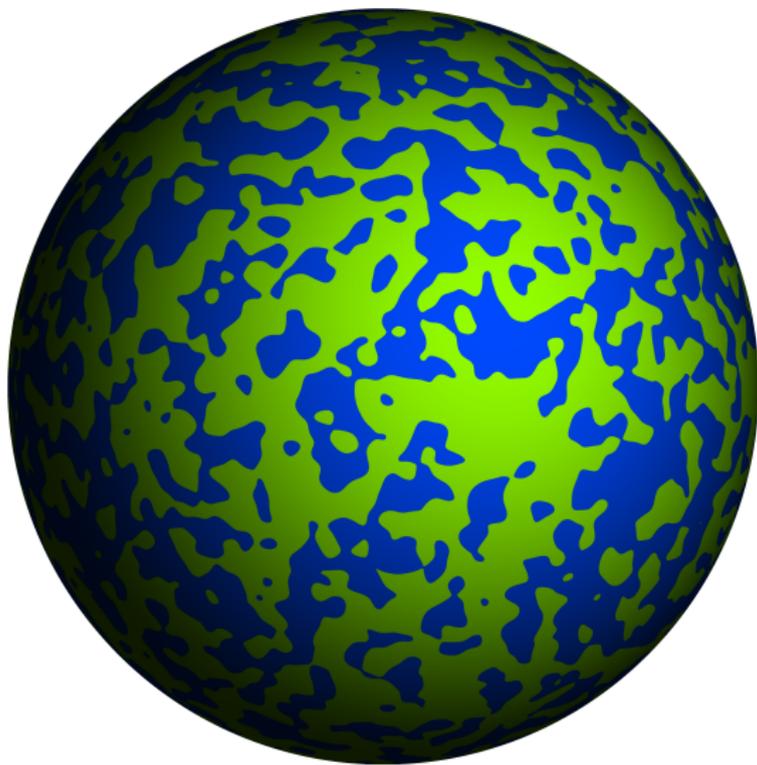
Champ de Bargmann-Fock



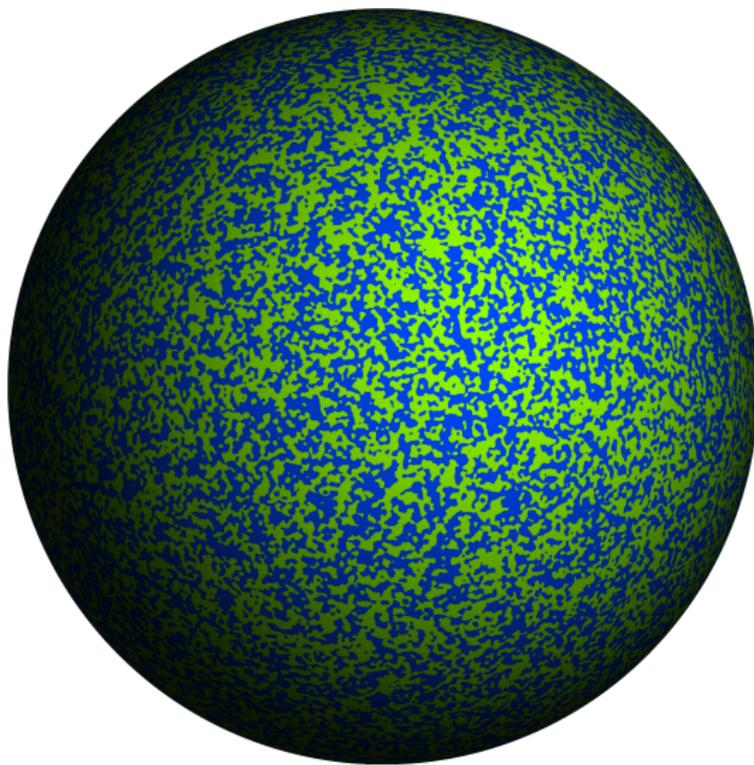
Polynôme homogène de degré 50  
Image : Vincent Beffara



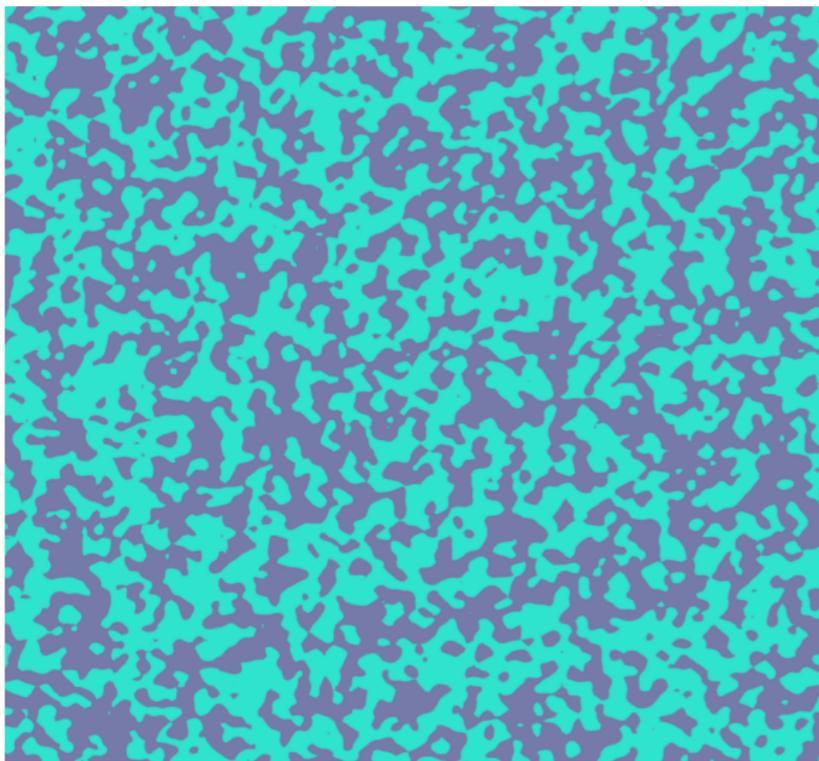
Polynôme homogène de degré 300



Polynôme homogène de degré 1000



Polynôme homogène de degré 20000



Champ de Bargmann-Fock

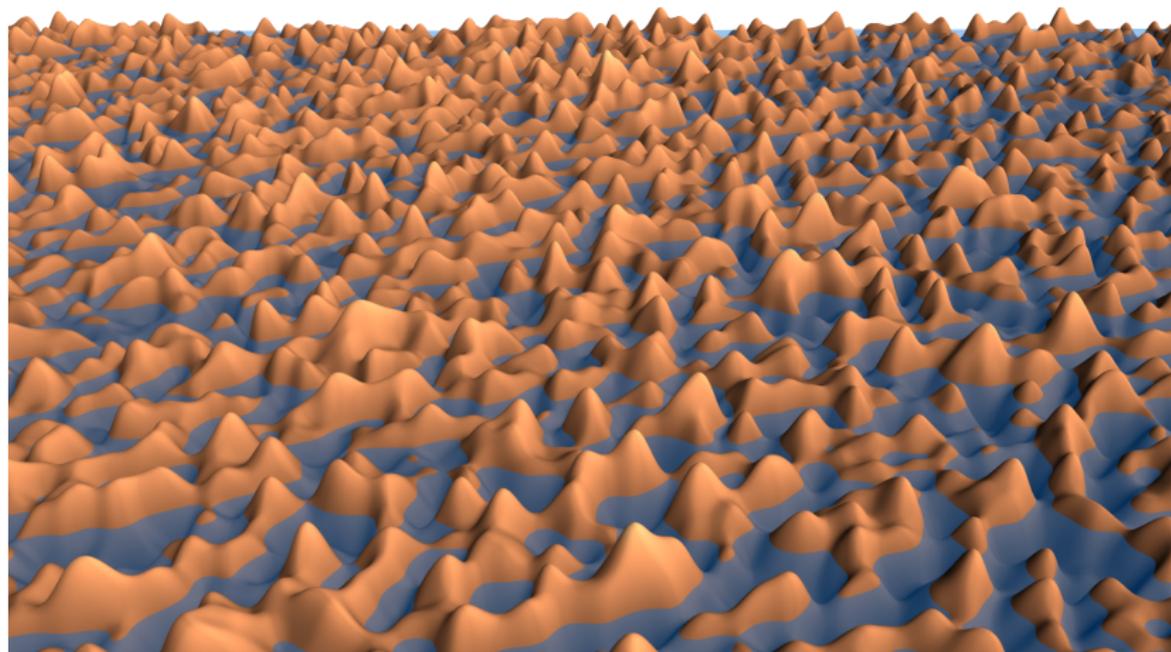
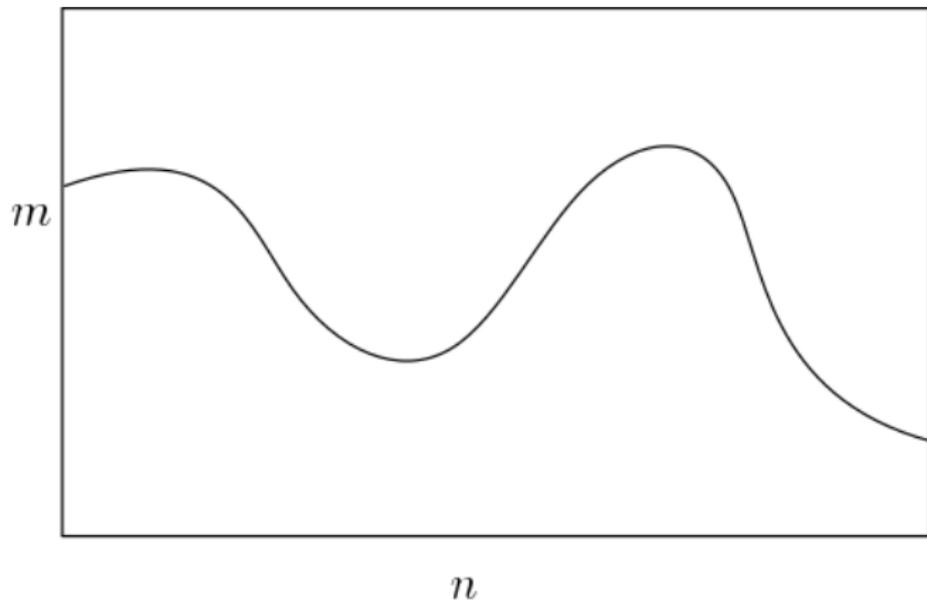


Image Alejandro Rivera

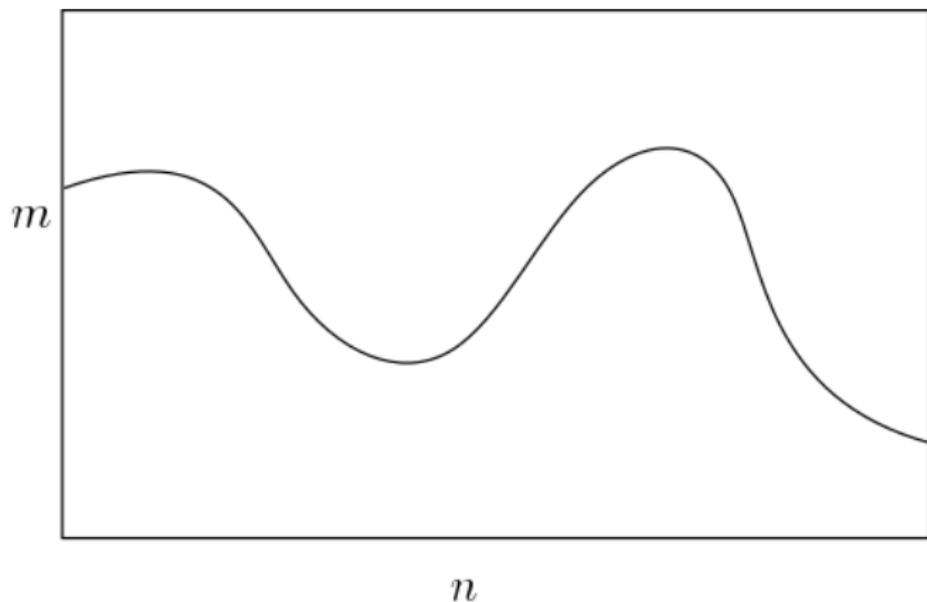
## Question générale

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-, +\}$  aléatoire, de mesure invariante par translations



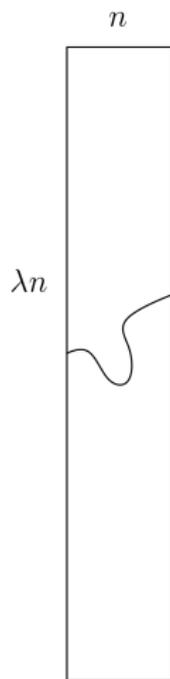
## Question générale

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{-, +\}$  aléatoire, de mesure invariante par translations



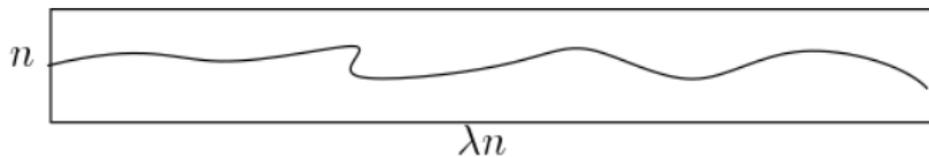
$\limsup_{n,m \rightarrow \infty} \text{Prob}(\text{traversée continue positive}) > 0?$

# Trop facile



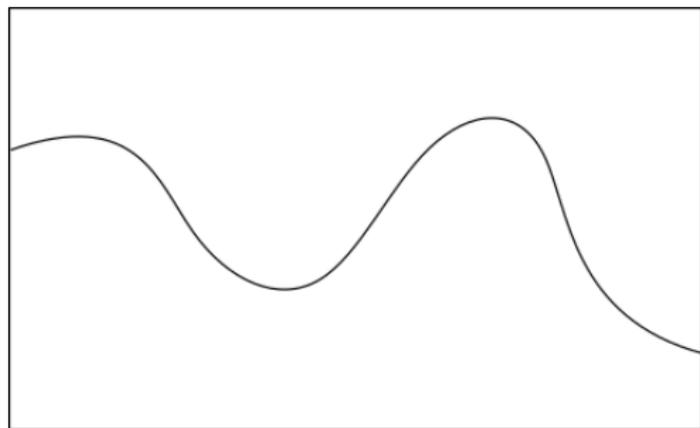
Prob  $\xrightarrow{n, \lambda \rightarrow \infty}$  1

# Trop difficile



Prob  $\xrightarrow[n, \lambda \rightarrow \infty]{} 0$

## Le bon équilibre

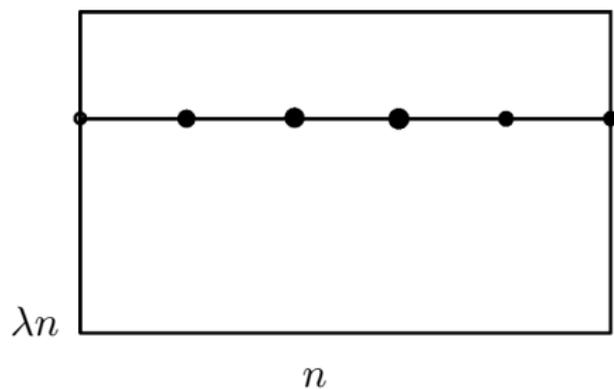


$nR$

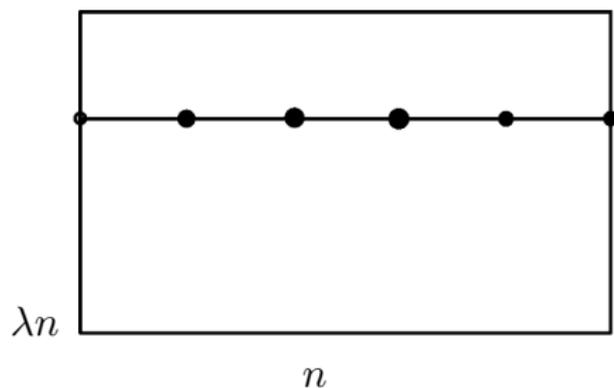
$R$  est un rectangle fixé.

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\text{traversée continue positive de } nR) > 0 ?$

# Tentative naïve pour Bernoulli

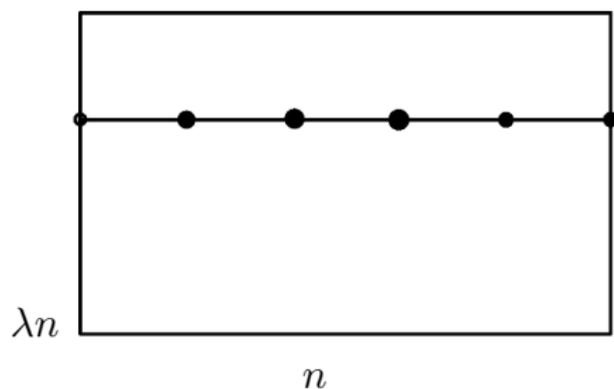


## Tentative naïve pour Bernoulli



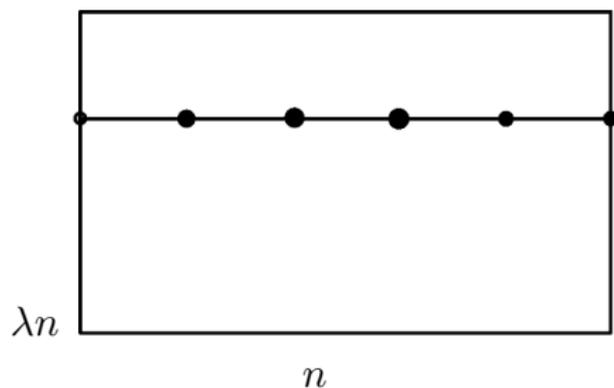
$$\text{Prob}(\text{traversée positive}) \geq \frac{1}{2^n}$$

## Tentative naïve pour Bernoulli



$$\text{Prob}(\text{traversée positive}) \geq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

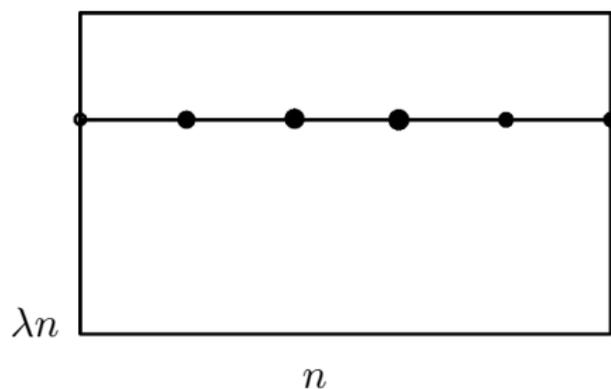
## Tentative naïve pour Bernoulli



$$\text{Prob}(\text{traversée positive}) \geq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Combinatoire :

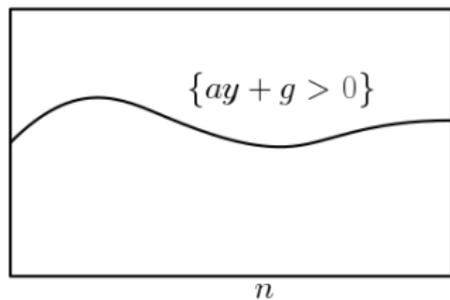
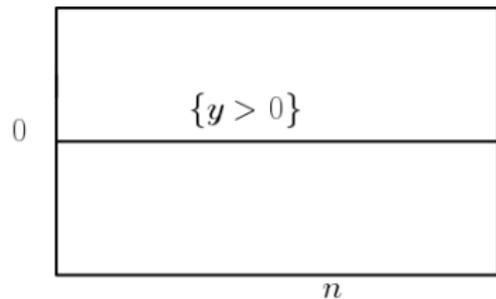
## Tentative naïve pour Bernoulli



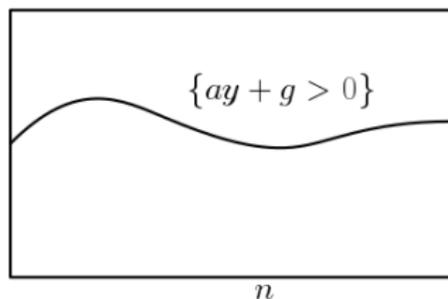
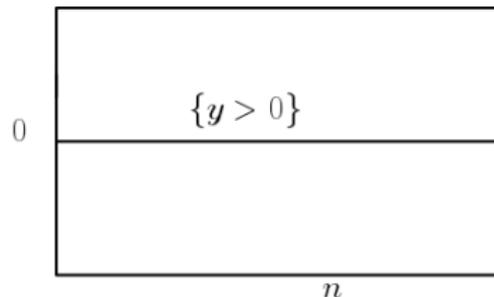
$$\text{Prob}(\text{traversée positive}) \geq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Combinatoire : impasse.

# Tentative naïve pour les fonctions

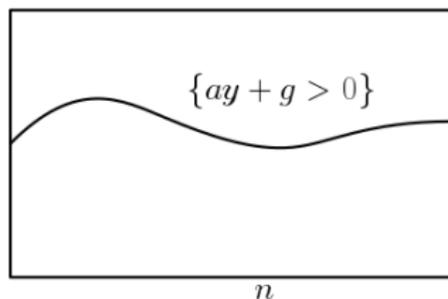
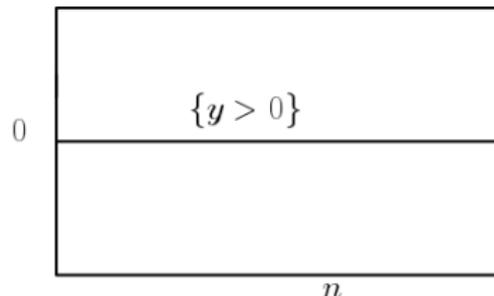


## Tentative naïve pour les fonctions

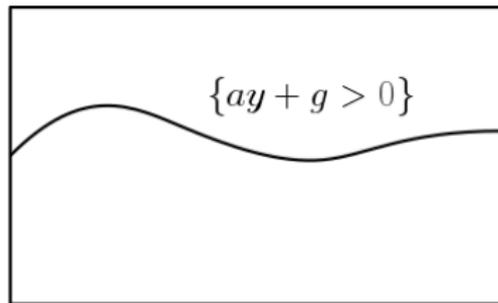


- ▶  $f = ay + g$ ,  $a \in \mathbb{R}$  aléatoire,  $g$  perturbation aléatoire.

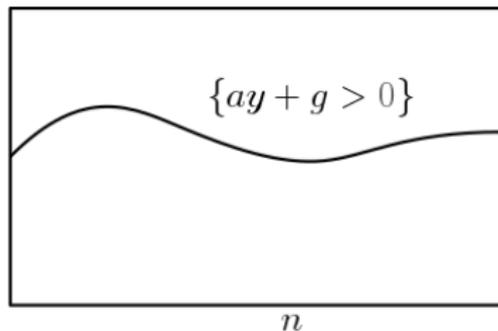
## Tentative naïve pour les fonctions



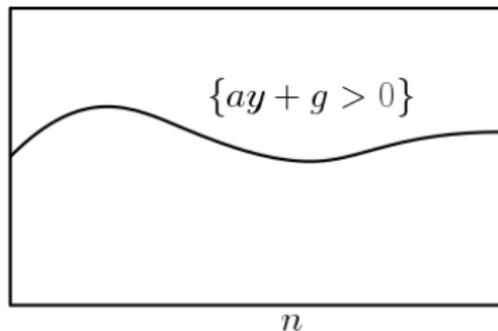
- ▶  $f = ay + g$ ,  $a \in \mathbb{R}$  aléatoire,  $g$  perturbation aléatoire.
- ▶  $a \geq 1$  et  $g$  petite sur  $[0, n] \Rightarrow \{f > 0\}$  traverse  $nR$



$n$

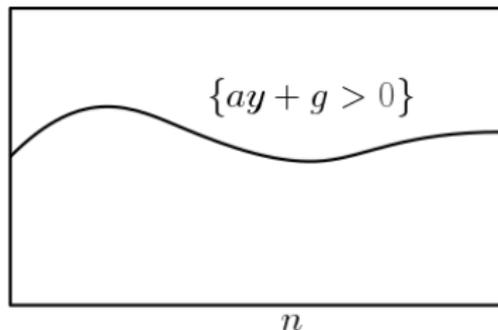


- ▶ Supposons que  $f(x)$  est quasiment indépendant de  $f(y)$  si  $|x - y| > 1$



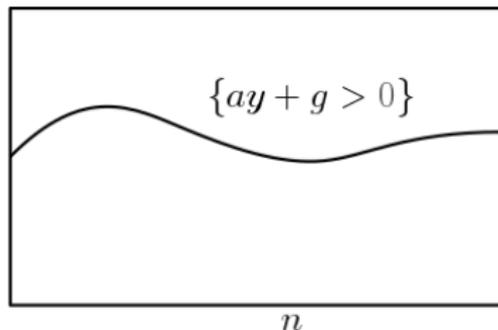
- ▶ Supposons que  $f(x)$  est quasiment indépendant de  $f(y)$  si  $|x - y| > 1$
- ▶ alors

Prob ( $g$  petite sur  $[0, n]$ )



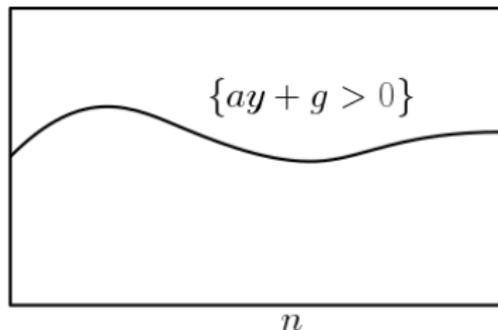
- ▶ Supposons que  $f(x)$  est quasiment indépendant de  $f(y)$  si  $|x - y| > 1$
- ▶ alors

$$\begin{aligned} & \text{Prob } (g \text{ petite sur } [0, n]) \\ & \leq \text{Prob } \left( g \text{ petite sur } \bigcup_{0 \leq 2i < n} [2i, 2i + 1] \right) \end{aligned}$$



- ▶ Supposons que  $f(x)$  est quasiment indépendant de  $f(y)$  si  $|x - y| > 1$
- ▶ alors

$$\begin{aligned}
 & \text{Prob } (g \text{ petite sur } [0, n]) \\
 & \leq \text{Prob} \left( g \text{ petite sur } \bigcup_{0 \leq 2i < n} [2i, 2i + 1] \right) \\
 & \simeq \prod_i \text{Prob} (g \text{ petite sur } [2i, 2i + 1])
 \end{aligned}$$



- ▶ Supposons que  $f(x)$  est quasiment indépendant de  $f(y)$  si  $|x - y| > 1$
- ▶ alors

$$\begin{aligned}
 & \text{Prob } (g \text{ petite sur } [0, n]) \\
 & \leq \text{Prob } \left( g \text{ petite sur } \bigcup_{0 \leq 2i < n} [2i, 2i + 1] \right) \\
 & \simeq \prod_i \text{Prob } (g \text{ petite sur } [2i, 2i + 1]) \\
 & = \left( \text{Prob } (g \text{ petite sur } [0, 1]) \right)^{n/2} \rightarrow_n 0
 \end{aligned}$$

## La topologie à l'aide

$$\text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{+} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

The image shows a mathematical equation involving two rectangular boxes. The first box contains a black wavy line that starts at the bottom left, goes up, loops back, and ends at the bottom right. A plus sign (+) is centered inside the box. The second box contains a red wavy line that starts at the top right, goes down, loops back, and ends at the top left. A minus sign (-) is centered inside the box. The equation is: Prob [first box] + Prob [second box] = 1.

# Carrés

$$\text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Black wavy line} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Red wavy line} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

The image shows a mathematical statement involving two square boxes. The first box contains a black wavy line that starts at the bottom-left corner, rises to a peak, dips to a valley, and then rises to a higher peak before ending at the top-right corner. The second box contains a red wavy line that starts at the top-right corner, dips to a valley, rises to a peak, and then dips to a valley before ending at the bottom-left corner. The two lines are complementary, together filling the square. The text 'Prob' is placed to the left of each box, and an equals sign followed by the number '1' is placed to the right of the second box.

# Carrés

$$\text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{[Square with a black wavy curve inside]} \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{[Square with a red wavy curve inside]} \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

Si la mesure de  $f$  est invariante par :

- ▶ symmetrie + et -
- ▶ symmetrie entre les coordonnées  $x_1$  and  $x_2$

# Carrés

$$\text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Graph of } f(x) \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Graph of } f(y) \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

Si la mesure de  $f$  est invariante par :

- ▶ symétrie + et -
- ▶ symétrie entre les coordonnées  $x_1$  and  $x_2$

alors les deux probabilités sont égales

# Carrés

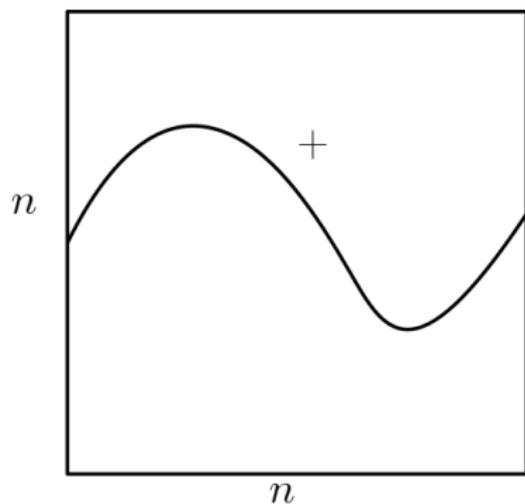
$$\text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Graph of } f(x) \\ \hline \end{array} \right] + \text{Prob} \left[ \begin{array}{|c|} \hline \text{Graph of } f(y) \\ \hline \end{array} \right] = 1$$

Si la mesure de  $f$  est invariante par :

- ▶ symétrie + et -
- ▶ symétrie entre les coordonnées  $x_1$  and  $x_2$

alors les deux probabilités sont égales, donc égales à  $1/2$ .

## Un bon début

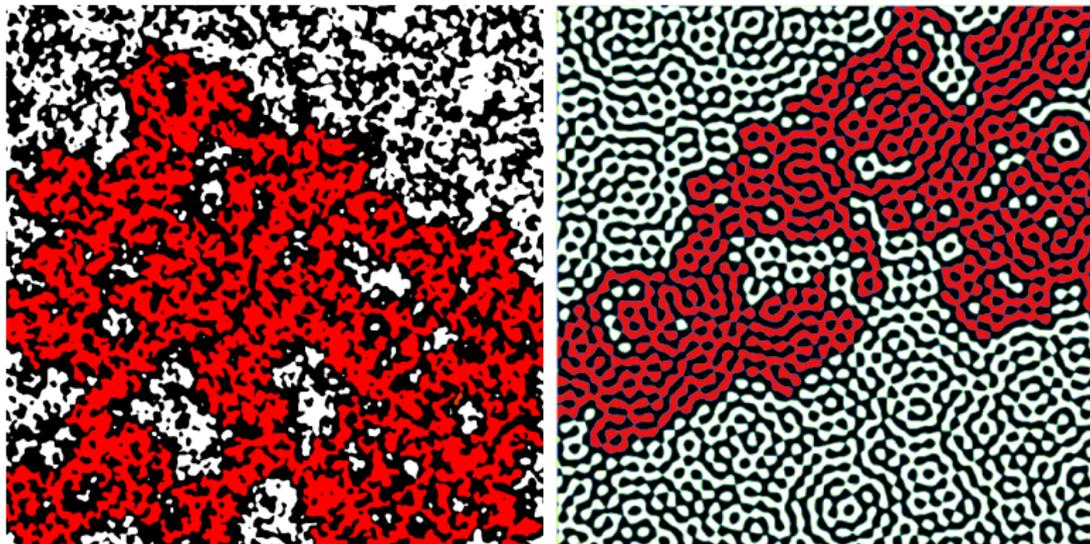


$$\forall n, \text{ Prob (traversée positive du carré)} = \frac{1}{2}.$$



**Théorème (Russo, Seymour-Welsh 1978)** Soit  $R \subset \mathbb{R}^2$  un rectangle. Alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\text{traversée positive de } nR) > 0.$$



**Question** : Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse aléatoire, de mesure invariante par translations, par le signe et par échange des coordonnées. Soit  $R \subset \mathbb{R}^2$ . A-t-on

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{f > 0\} \text{ traverse } nR) > 0 ?$$

## Exemple trivial

$$f = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

## Exemple trivial

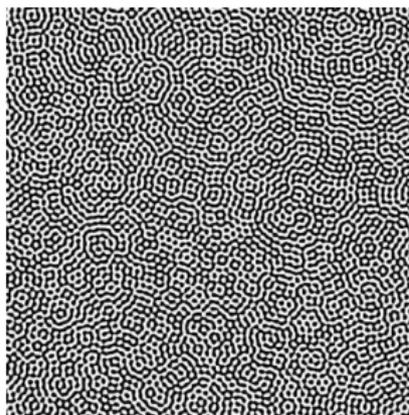
$$f = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{f > 0\} \text{ traverse } nR) = \frac{1}{2} > 0.$$

## Deux modèles universels d'origine géométrique

- ▶ Les ondes planes (origine riemannienne)
- ▶ Le modèle de Bargmann-Fock (origine algébrique)

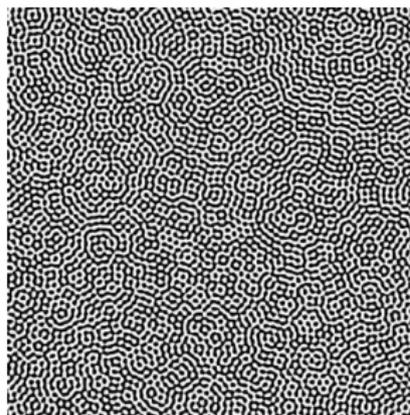
## Les ondes planes



Barnett, Bogomolny-Schmidt

- ▶  $f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta}$ ,  $(a_m)_m$  indépendantes de mesure  $N(0, 1)$

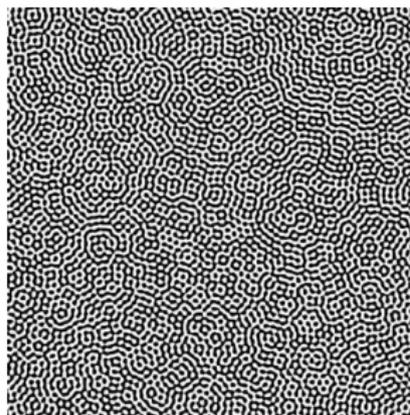
## Les ondes planes



Barnett, Bogomolny-Schmidt

- ▶  $f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta}$ ,  $(a_m)_m$  indépendantes de mesure  $N(0, 1)$
- ▶  $\Delta f = f$  équation de Helmholtz;

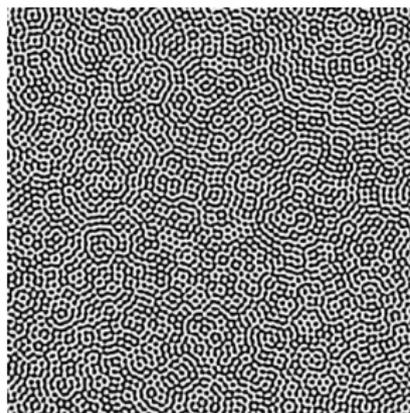
## Les ondes planes



Barnett, Bogomolny-Schmidt

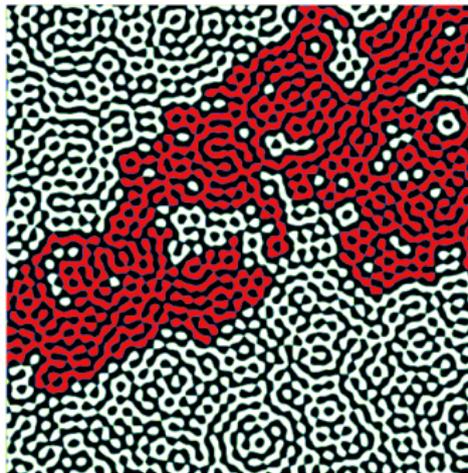
- ▶  $f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta}$ ,  $(a_m)_m$  indépendantes de mesure  $N(0, 1)$
- ▶  $\Delta f = f$  équation de Helmholtz ;
- ▶ modèle limite pour les **harmonique sphériques** ;

## Les ondes planes



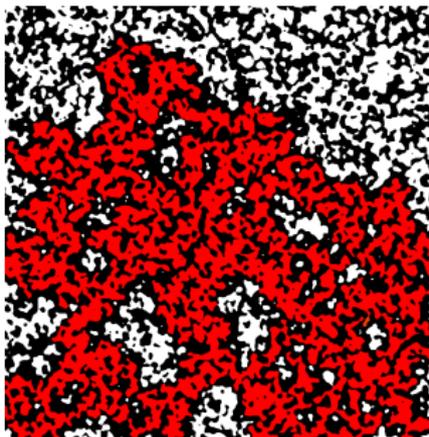
Barnett, Bogomolny-Schmidt

- ▶  $f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta}$ ,  $(a_m)_m$  indépendantes de mesure  $N(0, 1)$
- ▶  $\Delta f = f$  équation de Helmholtz ;
- ▶ modèle limite pour les **harmonique sphériques** ;
- ▶ modèle limite pour les fonctions propres du laplacien sur une variété compacte riemannienne.



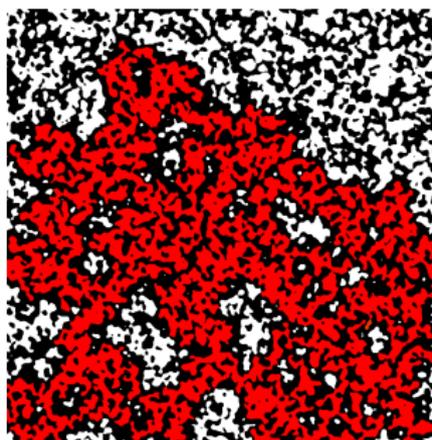
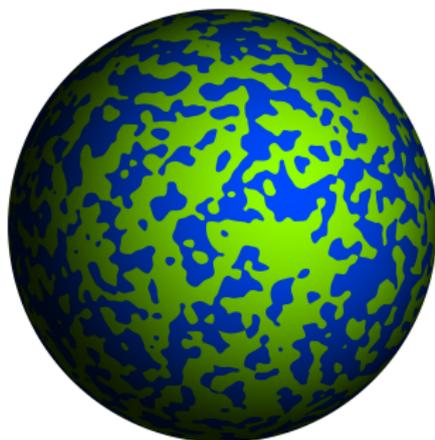
**Conjecture** (Bogomolny-Schmidt 2007) Le modèle des ondes planes doit satisfaire la propriété de Russo-Seymour-Welsh.

## Le modèle de Bargmann-Fock



$$f(x_1, x_2) = e^{-\|x\|^2} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}}$$

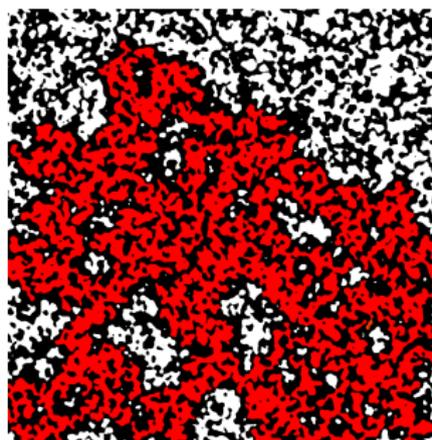
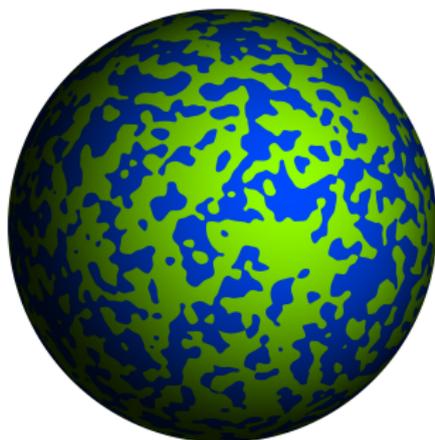
## Le modèle de Bargmann-Fock



$$f(x_1, x_2) = e^{-\|x\|^2} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}}$$

- ▶ Modèle limite pour les **polynômes** pour la mesure de Fubini-Study complexe (aka Kostlan).

## Le modèle de Bargmann-Fock



$$f(x_1, x_2) = e^{-\|x\|^2} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}}$$

- ▶ Modèle limite pour les **polynômes** pour la mesure de Fubini-Study complexe (aka Kostlan).
- ▶ Universel du point de vue de la géométrie algébrique complexe.

# Les origines algébriques

- ▶ Mesure de Kostlan ou Fubini-Study complexe :

# Les origines algébriques

- ▶ Mesure de Kostlan ou Fubini-Study complexe :

$$P = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0 i_1 i_2} \frac{X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2}}{\sqrt{i_0! i_1! i_2!}},$$

avec  $a_{i_0 i_1 i_2}$  indépendante et suivant une loi normale standard.

## Les origines algébriques

- ▶ Mesure de Kostlan ou Fubini-Study complexe :

$$P = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0 i_1 i_2} \frac{X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2}}{\sqrt{i_0! i_1! i_2!}},$$

avec  $a_{i_0 i_1 i_2}$  indépendante et suivant une loi normale standard.

- ▶ C'est la mesure gaussienne associée au produit  $L^2$  suivant :

$$\langle P, Q \rangle_{FS} = \int_{\mathbb{C}P^n} \frac{P(Z)\overline{Q(Z)}}{\|Z\|^{2d}} d\text{vol}_{FS}.$$

## Les origines algébriques

- ▶ Mesure de Kostlan ou Fubini-Study complexe :

$$P = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0 i_1 i_2} \frac{X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2}}{\sqrt{i_0! i_1! i_2!}},$$

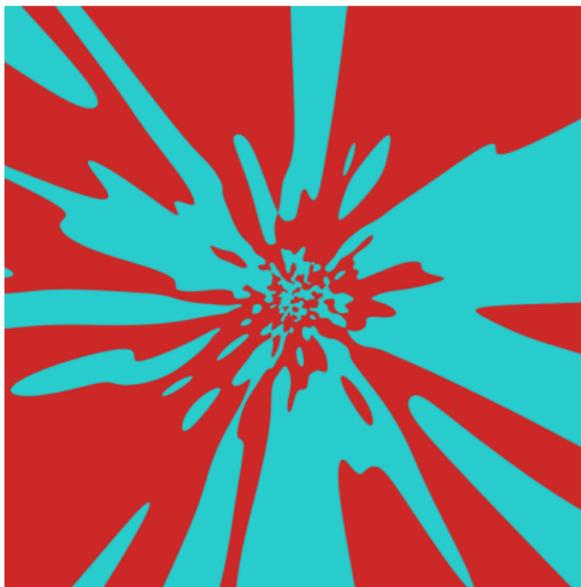
avec  $a_{i_0 i_1 i_2}$  indépendante et suivant une loi normale standard.

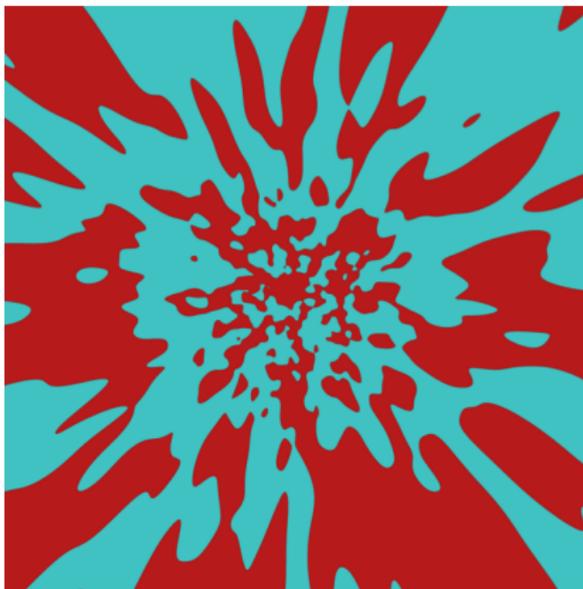
- ▶ C'est la mesure gaussienne associée au produit  $L^2$  suivant :

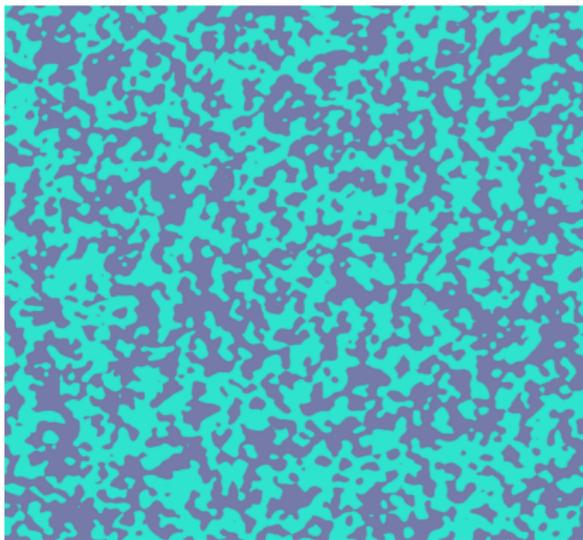
$$\langle P, Q \rangle_{FS} = \int_{\mathbb{C}P^n} \frac{P(Z)\overline{Q(Z)}}{\|Z\|^{2d}} d\text{vol}_{FS}.$$

Rééchelonnage par  $\sqrt{d}$  au point  $[1 : 0 : 0]$  :

$$\frac{1}{d}P\left(1 : \frac{x_1}{\sqrt{d}} : \frac{x_2}{\sqrt{d}}\right) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}}.$$





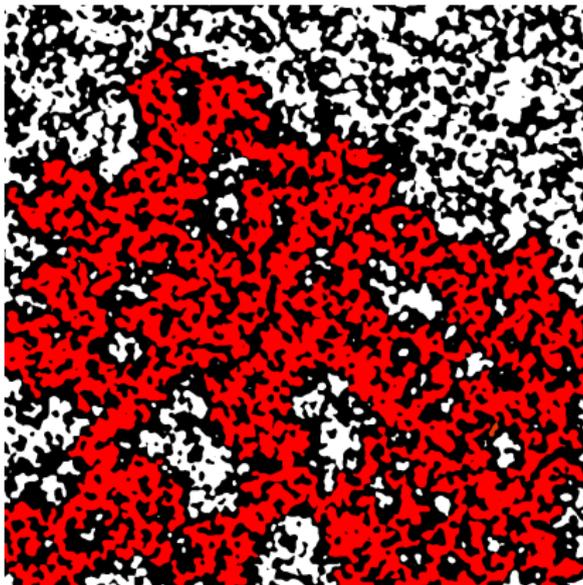


## Échelles :

- ▶ Pour un polynôme de degré  $d$ , l'échelle naturelle est  $1/\sqrt{d}$ , donc une échelle "grande" est 1.
- ▶ Pour le modèle limite Bargmann-Fock, l'échelle naturelle est 1.

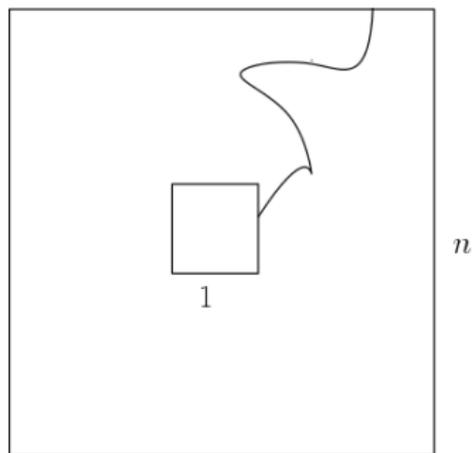
## Échelles :

- ▶ Pour un polynôme de degré  $d$ , l'échelle naturelle est  $1/\sqrt{d}$ , donc une échelle "grande" est 1.
- ▶ Pour le modèle limite Bargmann-Fock, l'échelle naturelle est 1.
- ▶ La percolation étudie le comportement de  $\{f > 0\}$  aux grandes échelles.



**Théorème** (Beffara-G 2016) Le modèle Bargmann-Fock satisfait la condition de Russo-Seymour-Welsh : pour tout rectangle  $R \subset \mathbb{R}^2$ ,

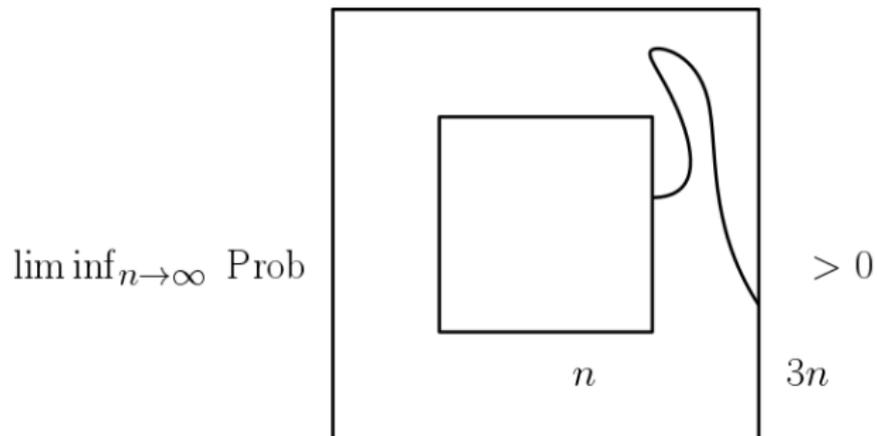
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{f > 0\} \text{ traverse } nR) > 0.$$

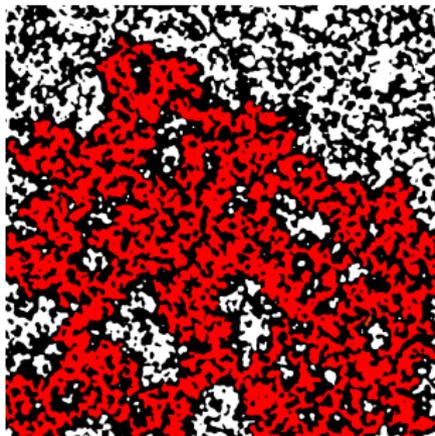


**Corollaire** Pour Bargmann-Fock,

$$\exists \alpha > 0, \forall n \gg 1, \text{Prob}(\text{un bras positif}) < \frac{1}{n^\alpha}.$$

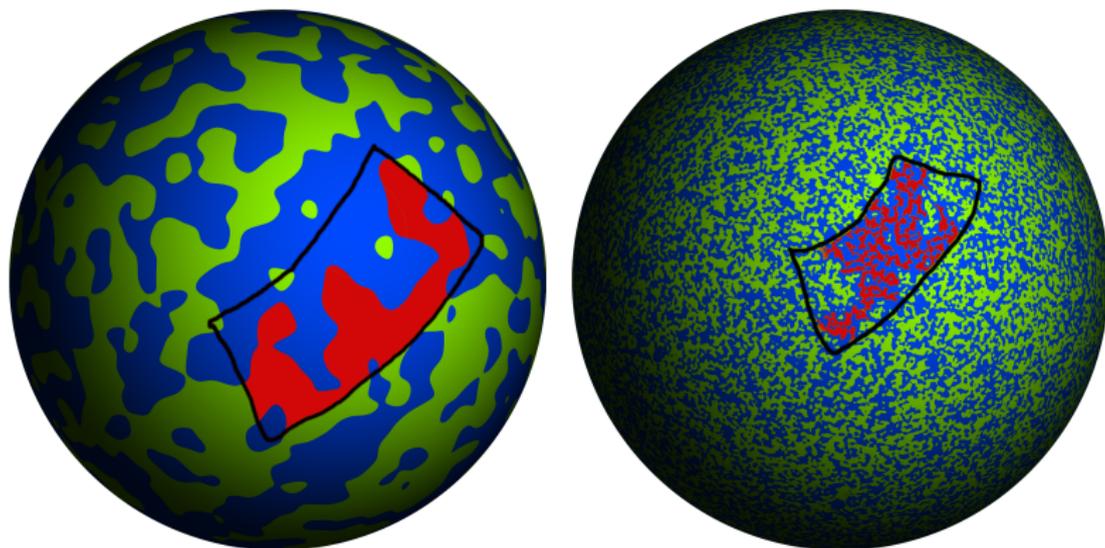
Ne pas confondre avec





**Corollaire** (Alexander 1996) Presque sûrement il n'y a pas de composantes infinies de  $\{f > 0\}$ .

## Retour aux polynômes



**Théorème** (Belyaev-Muirhead-Wigman 2017) Soit  $R \subset \mathbb{S}^2$  un rectangle topologique. Alors

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} \text{Prob} (\{P > 0\} \text{ traverse } R) > 0.$$

# Pourquoi Bargmann-Fock et pas les ondes planes ?

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ un champ Gaussien : en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \sim N(0, 1)$$

# Pourquoi Bargmann-Fock et pas les ondes planes ?

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ un champ Gaussien : en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \sim N(0, 1)$$

- ▶ presque sûrement lisse

# Pourquoi Bargmann-Fock et pas les ondes planes ?

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ un champ Gaussien : en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \sim N(0, 1)$$

- ▶ presque sûrement lisse
- ▶ de fonction de corrélation

$$e(x, y) := \mathbb{E}(f(x)f(y)) = k(\|x - y\|).$$

**Exemple :**

$$\text{Prob}(f(x) > 0 \mid f(y) > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(e(x, y)).$$

Ceci implique

### Exemple :

$$\text{Prob}(f(x) > 0 \mid f(y) > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(e(x, y)).$$

Ceci implique

- ▶ Si  $e(x, y) \rightarrow 0$  alors  $\text{sign } f(x)$  devient indépendant de  $\text{sign } f(y)$ .

### Exemple :

$$\text{Prob}(f(x) > 0 \mid f(y) > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(e(x, y)).$$

Ceci implique

- ▶ Si  $e(x, y) \rightarrow 0$  alors  $\text{sign } f(x)$  devient indépendant de  $\text{sign } f(y)$ .
- ▶ Si  $e > 0$  alors  $\text{sign } f(x)$  est positivement corrélé avec  $\text{sign } f(y)$ .

# Bargmann-Fock

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}} e^{-\|x\|^2}$$

## Bargmann-Fock

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}} e^{-\|x\|^2}$$

La fonction de corrélation vaut

$$e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2).$$

## Bargmann-Fock

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \frac{x_1^i x_2^j}{\sqrt{i!j!}} e^{-\|x\|^2}$$

La fonction de corrélation vaut

$$e(x, y) = \exp(-\|x - y\|^2).$$

Deux vertus partagées avec Bernoulli :

1. positivité
2. décroissance rapide  $\rightarrow$  faible dépendance

## Ondes planes

$$f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta}$$

La fonction de corrélation vaut

$$e(x, y) = J_0(\|x - y\|)$$

## Ondes planes

$$f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_{|m|}(r) e^{im\theta}$$

La fonction de corrélation vaut

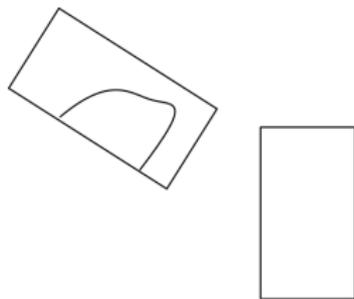
$$e(x, y) = J_0(\|x - y\|)$$

Deux plaies :

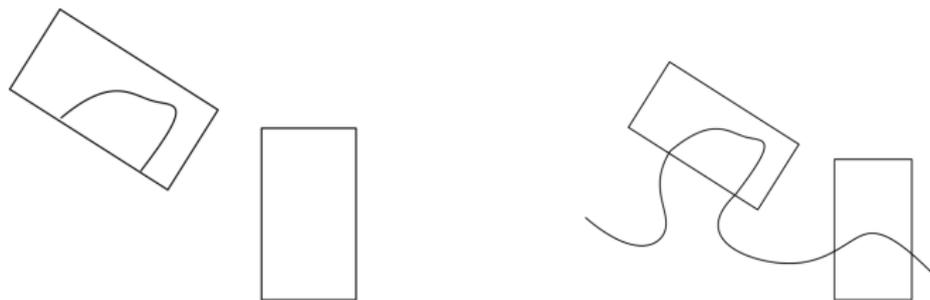
1. change de signe
2. décroît lentement  $\rightarrow$  dépendance forte

Une décorrélation forte n'est pas suffisante...

Une décorrélation forte n'est pas suffisante...



Une décorrélation forte n'est pas suffisante...

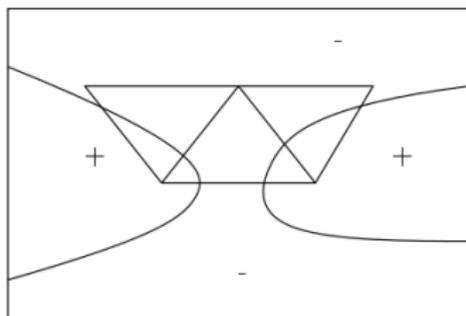


... en raison du **prolongement analytique**.

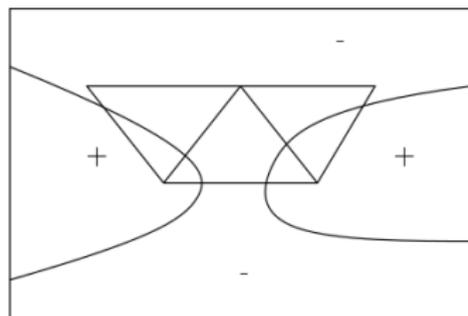
## Solution : floutage par discrétisation

- ▶  $\mathcal{T}$  = réseau triangulaire,
- ▶  $\mathcal{V}$  = ses sommets,
- ▶  $\text{sign } f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \{\pm 1\}$ .
- ▶ Percolation par site : l'arête est positive ssi ses extrémités sont positives.

Peut-on faire confiance à la discrétisation ?

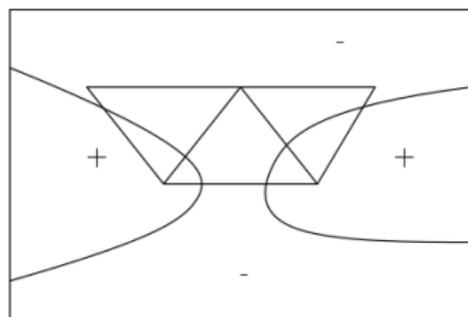


Peut-on faire confiance à la discrétisation ?

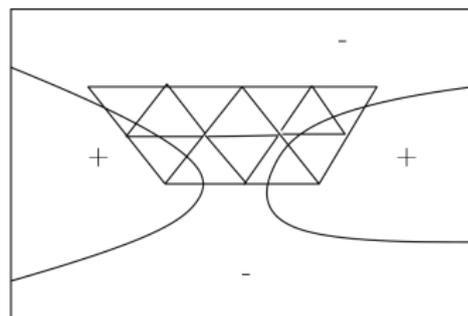


1. Si  $\mathcal{T}$  est trop grossier, alors non.

# Peut-on faire confiance à la discrétisation ?

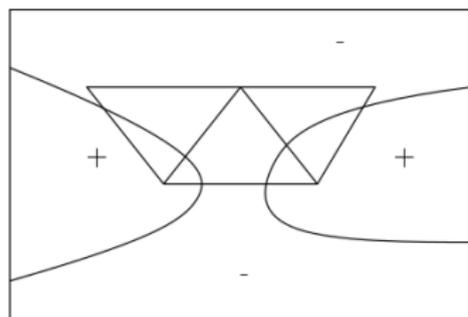


1. Si  $\mathcal{T}$  est trop grossier, alors non.

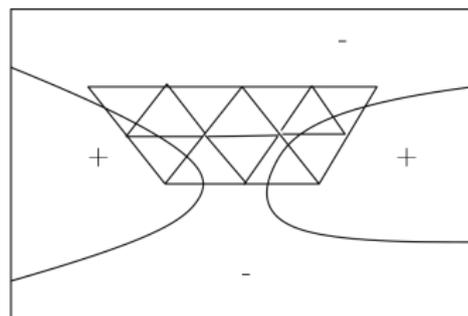


2. Si  $\mathcal{T}$  est très fin, alors oui, mais on a de plus en plus d'informations sur le signe de  $f$ ...

## Peut-on faire confiance à la discrétisation ?

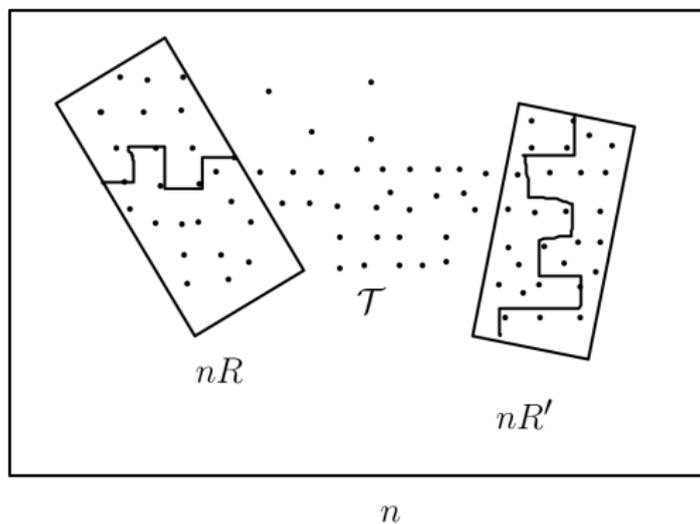


1. Si  $\mathcal{T}$  est trop grossier, alors non.

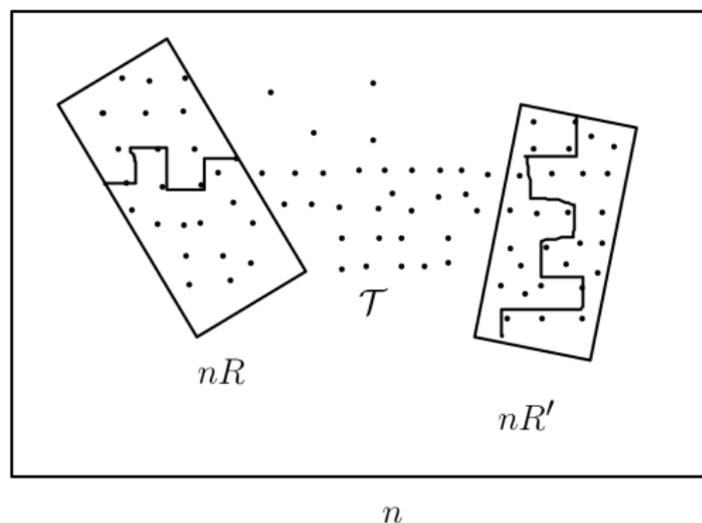


2. Si  $\mathcal{T}$  est très fin, alors oui, mais on a de plus en plus d'informations sur le signe de  $f$ ... **la dépendance revient.**

Donc deux questions

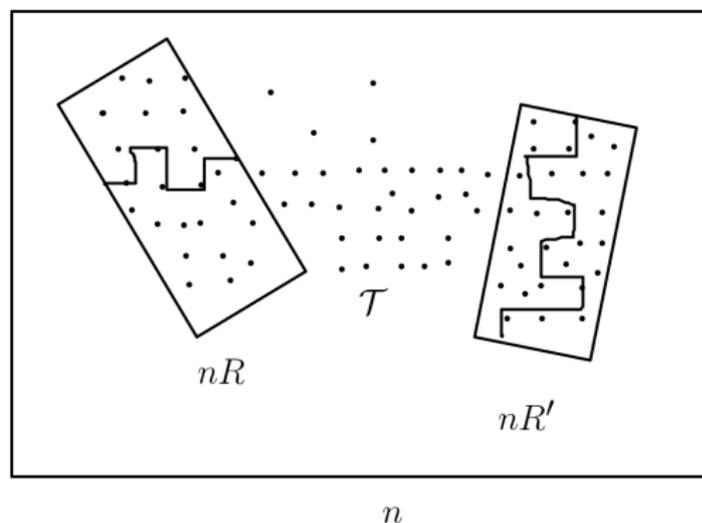


## Donc deux questions



1. Si l'on veut une probabilité proche de 1 d'avoir une bonne discrétisation à une échelle  $n$ , quelle maille faut-il prendre pour le réseau  $\mathcal{T}$  en fonction de  $n$  ?

## Donc deux questions



1. Si l'on veut une probabilité proche de 1 d'avoir une bonne discrétisation à une échelle  $n$ , quelle maille faut-il prendre pour le réseau  $\mathcal{T}$  en fonction de  $n$  ?
2. Ce raffinement fait exploser l'information dans le rectangle  $nR$ . Est-ce que ça menace la quasi indépendance avec un autre rectangle  $nR'$  ?

## Le coût de la discrétisation

**Théorème (Beffara-G 2016)** Dans  $[0, n]^2$ , avec probabilité proche de 1,

traversées continues  
 $\Leftrightarrow$   
traversées discrètes dans  $\frac{1}{n^9}\mathcal{T}$ .

## Le coût de la discrétisation

**Théorème (Beffara-G 2016)** Dans  $[0, n]^2$ , avec probabilité proche de 1,

$$\begin{array}{ccc} \text{traversées} & \text{continues} & \\ & \Leftrightarrow & \\ \text{traversées} & \text{discrètes} & \text{dans } \frac{1}{n^9} \mathcal{T}. \end{array}$$

**Idée de la démonstration :**

1. Équivalence si les lignes nodales ne croisent pas deux fois une arête de la boîte ;

## Le coût de la discrétisation

**Théorème (Beffara-G 2016)** Dans  $[0, n]^2$ , avec probabilité proche de 1,

$$\begin{array}{ccc} \text{traversées} & \text{continues} & \\ & \Leftrightarrow & \\ \text{traversées} & \text{discrètes} & \text{dans } \frac{1}{n^9} \mathcal{T}. \end{array}$$

**Idée de la démonstration :**

1. Équivalence si les lignes nodales ne croisent pas deux fois une arête de la boîte ;
2. ce mauvais événement ne survient que très rarement si les arêtes sont suffisamment petites ;

## Le coût de la discrétisation

**Théorème (Beffara-G 2016)** Dans  $[0, n]^2$ , avec probabilité proche de 1,

$$\begin{array}{ccc} \text{traversées} & \text{continues} & \\ & \Leftrightarrow & \\ \text{traversées} & \text{discrètes} & \text{dans } \frac{1}{n^9} \mathcal{T}. \end{array}$$

### Idée de la démonstration :

1. Équivalence si les lignes nodales ne croisent pas deux fois une arête de la boîte ;
2. ce mauvais événement ne survient que très rarement si les arêtes sont suffisamment petites ;
3. Utilise un résultat de Marek Kac de 1943 sur le nombre moyen de zéros d'une fonction aléatoire sur l'arête.

## Quasi indépendance

**Théorème (Beffara-G 2016 - )**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R, R'$  deux rectangles disjoints :

dépendance( $R, R'$ ) :=

$$\max_{\substack{A \text{ traversée de } R \\ A' \text{ traversée de } R'}} |\text{Prob}(A \text{ et } A') - \text{Prob } A \text{ Prob } A'|$$

## Quasi indépendance

**Théorème (Beffara-G 2016 - )**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R, R'$  deux rectangles disjoints :

dépendance( $R, R'$ ) :=

$$\max_{\substack{A \text{ traversée de } R \\ A' \text{ traversée de } R'}} |\text{Prob}(A \text{ et } A') - \text{Prob } A \text{ Prob } A'|$$

$\leq$

$$(\# \text{ sommets dans } R \text{ et } R')^{8/5} \max_{\substack{x \in R \\ y \in R'}} |e(x, y)|^{1/5}.$$

## Quasi indépendance

**Théorème (Beffara-G 2016 - Piterbarg 1982)**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R, R'$  deux rectangles disjoints :

dépendance( $R, R'$ ) :=

$$\max_{\substack{A \text{ traversée de } R \\ A' \text{ traversée de } R'}} |\text{Prob}(A \text{ et } A') - \text{Prob } A \text{ Prob } A'|$$

$\leq$

$$(\# \text{ sommets dans } R \text{ et } R')^{8/5} \max_{\substack{x \in R \\ y \in R'}} |e(x, y)|^{1/5}.$$

## Quasi indépendance

**Théorème (Beffara-G 2016 - Piterbarg 1982)**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R, R'$  deux rectangles disjoints :

dépendance( $R, R'$ ) :=

$$\max_{\substack{A \text{ traversée de } R \\ A' \text{ traversée de } R'}} |\text{Prob}(A \text{ et } A') - \text{Prob } A \text{ Prob } A'|$$

$\leq$

$$(\# \text{ sommets dans } R \text{ et } R')^{8/5} \max_{\substack{x \in R \\ y \in R'}} |e(x, y)|^{1/5}.$$

*Information versus oubli*

## Quasi indépendance

**Théorème (Beffara-G 2016 - Piterbarg 1982)**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R, R'$  deux rectangles disjoints :

$$\begin{aligned} \text{dépendance}(R, R') &:= \\ &\max_{\substack{A \text{ traversée de } R \\ A' \text{ traversée de } R'}} |\text{Prob}(A \text{ et } A') - \text{Prob } A \text{ Prob } A'| \\ &\leq \\ &(\# \text{ sommets dans } R \text{ et } R')^{8/5} \max_{\substack{x \in R \\ y \in R'}} |e(x, y)|^{1/5}. \end{aligned}$$

*Information versus oubli*

Pour notre discretisation appliquée à Bargmann-Fock, cela donne

$$\text{dependence}(nR, nR') \leq n^{32} e^{-n^2/5}$$

## Quasi indépendance

**Théorème (Beffara-G 2016 - Piterbarg 1982)**

Soit  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R, R'$  deux rectangles disjoints :

dépendance( $R, R'$ ) :=

$$\max_{\substack{A \text{ traversée de } R \\ A' \text{ traversée de } R'}} |\text{Prob}(A \text{ et } A') - \text{Prob } A \text{ Prob } A'|$$

$\leq$

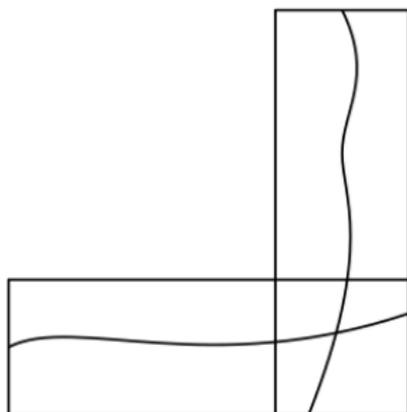
$$(\# \text{ sommets dans } R \text{ et } R')^{8/5} \max_{\substack{x \in R \\ y \in R'}} |e(x, y)|^{1/5}.$$

*Information versus oubli*

Pour notre discretisation appliquée à Bargmann-Fock, cela donne

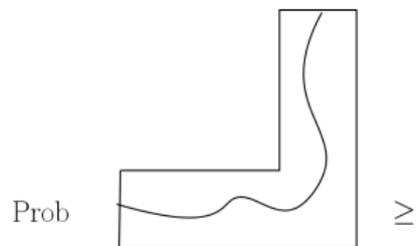
$$\text{dependence}(nR, nR') \leq n^{32} e^{-n^2/5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

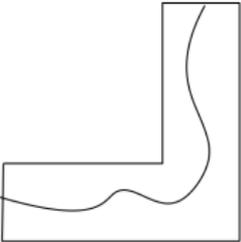
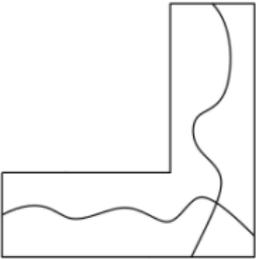
## Seconde vertu pour Bargmann-Fock



**FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre)** implique

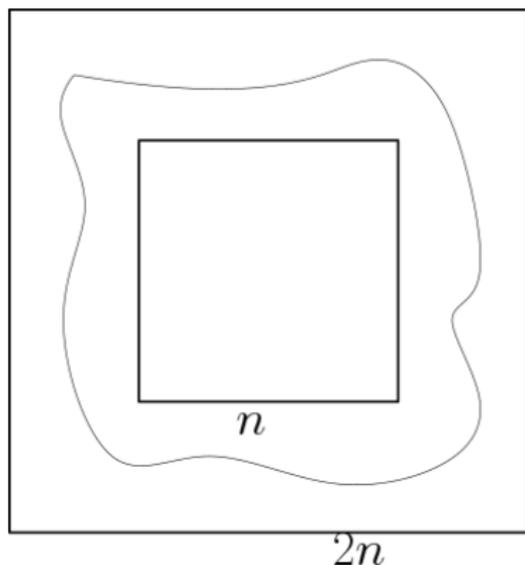
$$\begin{aligned} & \text{Prob}(\text{traversée positive de } R \text{ et traversée positive de } R') \\ & \qquad \qquad \qquad \geq \\ & \text{Prob}(\text{traversée positive de } R) \cdot \text{Prob}(\text{traversée positive de } R'). \end{aligned}$$



Prob   $\geq$  Prob   $\geq$

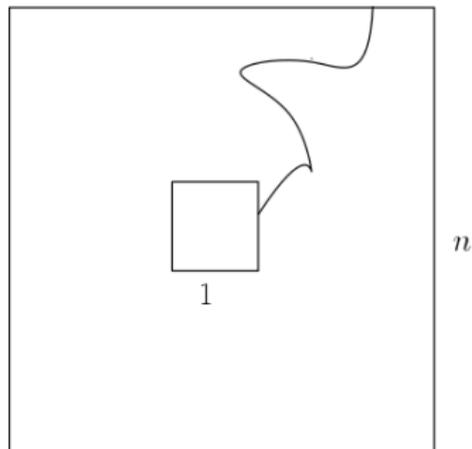
$$\begin{aligned}
 & \text{Prob} \left[ \text{Diagram 1} \right] \geq \text{Prob} \left[ \text{Diagram 2} \right] \geq \\
 & \text{Prob} \left[ \text{Diagram 3} \right] \times \text{Prob} \left[ \text{Diagram 4} \right] \\
 & = \text{Prob} (\text{traversée positive du rectangle})^2
 \end{aligned}$$

The diagrams illustrate the decomposition of a path in an L-shaped domain. 
 Diagram 1 shows a path in an L-shaped region. 
 Diagram 2 shows the same path with a vertical line segment added, creating a crossing. 
 Diagram 3 shows a horizontal rectangle containing a path. 
 Diagram 4 shows a vertical rectangle containing a path. 
 The inequality chain shows that the probability of the path in the L-shape is at least the probability of the path with a crossing, which is at least the product of the probabilities of the path in the horizontal and vertical rectangles. 
 The final equality states that this product is equal to the square of the probability of a positive crossing of a rectangle.

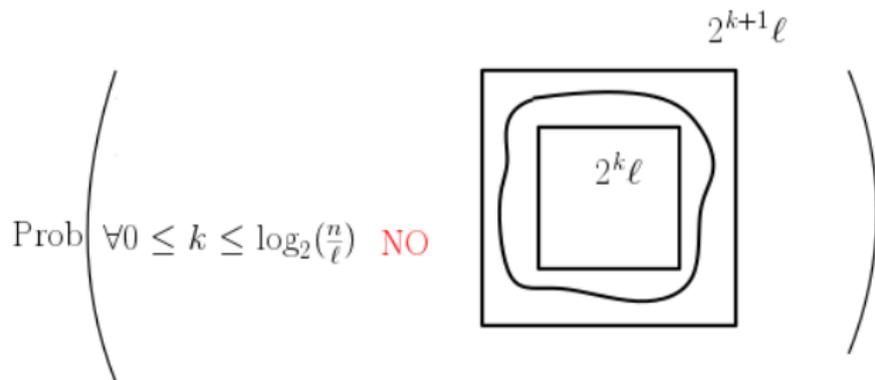
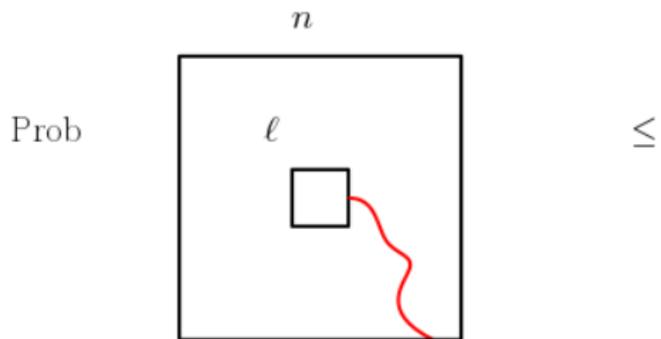


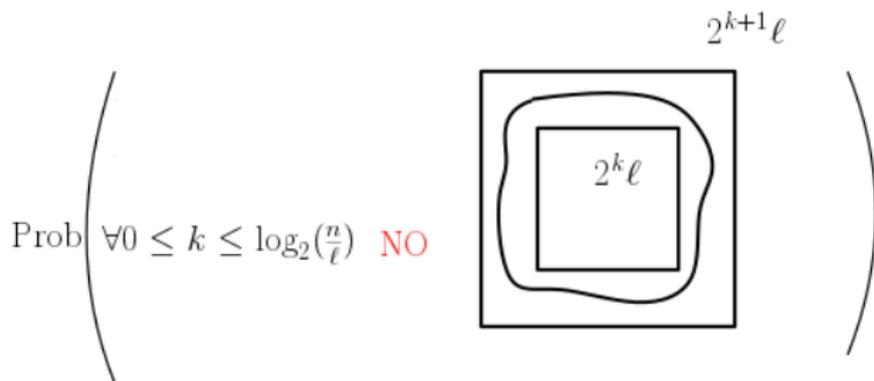
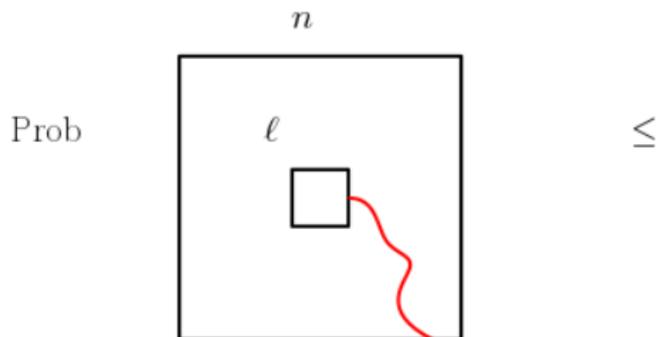
Prob (circuit)  $\geq$  Prob (traversée positive du rectangle)<sup>4</sup>

# RSW+FKG+faible dépendance



$$\text{Prob} < \frac{1}{n^\alpha}.$$





$$\simeq (1 - c)^{\log_2\left(\frac{n}{l}\right)} = \left(\frac{l}{n}\right)^{-\log_2(1-c)}.$$

**Théorème (Loren Pitt 1982)** Pour les fonctions gaussiennes,  
 $FKG \Leftrightarrow$  fonction de corrélation positive.

**Théorème (Tassion 2016)** Soit une famille de modèles satisfaisant :

1. FKG ;
2. uniforme traversée des carrés ;
3. uniforme quasi indépendance ;

Alors la famille satisfait RSW de façon uniforme (les probabilités de traversées sont uniformément minorées).

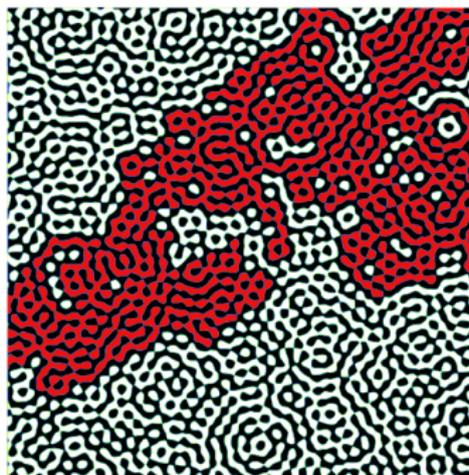
**Théorème (Tassion 2016)** Soit une famille de modèles satisfaisant :

1. FKG ;
2. uniforme traversée des carrés ;
3. uniforme quasi indépendance ;

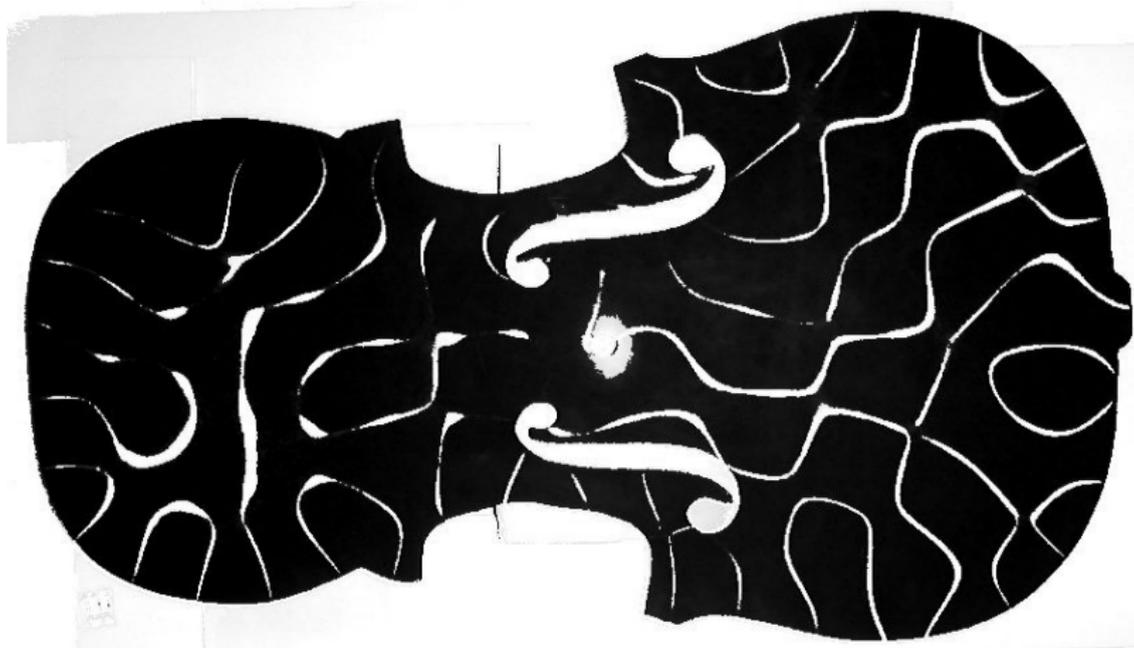
Alors la famille satisfait RSW de façon uniforme (les probabilités de traversées sont uniformément minorées).

**Démonstration pour Bargmann-Fock.** À toute échelle  $n$ , la discretisation fournit un modèle. On applique le théorème précédent pour toutes les échelles.

## Rappel



**Conjecture** (Bogomolny-Schmidt 2007) Le modèle des ondes planes doit satisfaire la propriété de Russo-Seymour-Welsh.



Fin